Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

7 КЛАСС

1. В трёх ящиках лежит по одному шарику: белый, красный и синий. На первом ящике надпись «белый», на втором — «красный», а на третьем — «белый или синий». Ни одна надпись не соответствует действительности. Где что находится?

2. Решить числовой ребус
$$\text{УДАР} + \text{УДАР} = \text{ДРАКА}$$
где разные буквы означают разные цифры.

3. Найти наибольшее натуральное число без повторений цифр, в котором произведение любых двух подряд идущих цифр делится на 6.

4. Сколько имеется четырёхзначных чисел, у которых сумма цифр кратна десяти?

5. Разрезать прямоугольник 3×9 на 8 квадратов.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

8 КЛАСС

1. В трёх одинаковых коробках лежат по два шарика: в одной — два белых, в другой — два чёрных, в третьей — белый и чёрный. На каждой коробке есть табличка: на одной изображены два белых шарика, на другой — два чёрных, на третьей — белый и чёрный. Известно, что содержимое каждой коробки не соответствует табличке. Как, вынув только один шарик только из одной коробки, установить содержимое каждой из коробок?

2. Дана таблица 6×3. В каждую её клетку вписывается число 0 или 1. Если на пересечении каких-то двух строк с какими-то двумя столбцами все четыре числа получаются одинаковыми, то считаем, что таблица заполнена неудачно. Можно ли так заполнить таблицу, чтобы этого явления избежать?

3. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля с постоянными скоростями. За один час до приезда первого в B и за четыре часа до приезда второго в A они встретились. Найти отношение скоростей автомобилей.

4. В выпуклом четырехугольнике проведены биссектрисы всех его углов. Может ли каждая из сторон четырехугольника пересекаться какой-либо биссектрисой в точке, отличной от вершины?

5. Можно ли разрезать квадрат 5×5 на прямоугольники двух видов: 1×4 и 1×3, чтобы получилось ровно 8 прямоугольников?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

9 КЛАСС

1. Дано двузначное число, у которого первая цифра больше второй. Его цифры переставили, и получили новое двузначное число. Разность первого и второго числа оказалась точным квадратом. Сколько имеется всевозможных двузначных чисел, удовлетворяющих условию?

2. Дана таблица 7×3. В каждую её клетку вписывается число 0 или 1. Если на пересечении каких-то двух строк с какими-то двумя столбцами все четыре числа получаются одинаковыми, то считаем, что таблица заполнена неудачно. Можно ли так заполнить таблицу, чтобы этого явления избежать?

3. Между цифрами числа 987654321 надо расставить знаки + так, чтобы в сумме получилось 99. Сколькими способами этого можно добиться?

4. На плоскости дано 10 различных точек. Рассмотрели середины всех отрезков, соединяющих все пары точек. Какое наименьшее количество середин при этом могло возникнуть?

5. Имеется клетчатое поле 10×10 для игры в “морской бой”. В данном случае игра происходит по необычным правилам, и разрешается использовать только корабли размером 1×2, располагаемые как горизонтально, так и вертикально. Какое наибольшее число этих кораблей можно разместить на таком поле, если корабли не должны выходить на границу квадрата, а между собой не могут соприкасаться даже в точке?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

10 КЛАСС

1. За круглым столом сидят 12 человек. Часть из них является рыцарями, всегда говорящими правду, а оставшаяся часть — лжецами, которые всегда лгут. Каждый из сидящих объявил лжецом своего соседа, сидящего слева. Можно ли наверняка утверждать, сколько за столом было рыцарей, и сколько лжецов?

2. Найти наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56, и имеет сумму цифр, равную 56.

3. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{3-x}$, заданную на числовой прямой. При каких x значение функции является целым числом?

4. Пусть AK — биссектриса треугольника ABC, а L — точка пересечения биссектрис этого треугольника. Доказать, что $AL > LK$.

5. Петя и Вася играют в игру, по очереди называя ненулевые десятичные цифры. Нельзя называть цифру, которая является делителем какой-то из уже названных кем-либо. Проигрывает тот, у кого нет хода. Начинает Петя. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

11 КЛАСС

1. Не используя калькуляторов и прочих вычислительных средств, выяснить, какое из двух чисел больше:
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad \sqrt[6]{18}?$$

2. Имеется четыре старых советских медных монеты достоинством 1 коп., 2 коп., 3 коп. и 5 коп. Вес каждой из монет в граммах должен быть численно равен её достоинству. Известно, что одна из монет является бракованной, и по весу она отличается от нормальной. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?

3. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{3-x}$, заданную на числовой прямой. При каких x значение функции является целым числом?

4. Можно ли, используя только три различные цифры, составить 16 трехзначных чисел таких, что все 16 чисел при делении на 16 дают различные остатки? (Не обязательно, чтобы каждое трехзначное число состояло из разных цифр.)

5. Равнобедренный треугольник ABC с вершиной B вписан в окружность радиуса R. В него вписана окружность радиуса r. В сегмент, ограниченный хордой AB и меньшей из дуг, вписана другая окружность, радиус которой также равен r. Найти отношение $R : r$.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи, баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для её решения, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и не до конца поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Некоторые предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В тех задачах, где требуется построить какой-либо пример, не обязательно приводить рассуждения о том, как именно он был получен. В случае, если правильность примера легко проверяется, его достаточно всего лишь предъявить. К этой группе задач относятся VII.5, VIII.2 (где желательно хотя бы краткое обоснование). Однако во многих задачах, помимо верного примера, нужно бывает обосновывать или единственность найденного решения (как в числовом ребусе), или тот факт, что найденное число является наименьшим возможным.

Задачи VII.1, VII.4, VIII.1, VIII.3, VIII.4, X.1, X.4, XI.5 относятся к числу обычных школьных. Их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Максимальный балл даётся за полное решение.

В задаче VII.2 за верный ответ в решении числового ребуса, без обоснования единственности решения, присуждается 3 балла. То же самое касается задачи VII.3, если верный ответ указан, но не обоснован.

В задаче VIII.5 баллы даются только при наличии полного обоснования. За использование идеи раскраски можно давать 1 балл.

В задаче IX.1 за верную идею подсчёта можно давать до 3 баллов, если в вычислениях допущены ошибки. При этом, если у кого-то фигурирует допущение, что двузначное число может начинаться с нуля (что является грубой ошибкой), а всё остальное верно, даётся не более 1 балла.

В задаче IX.2 требуется полное обоснование ответа.

В задаче IX.3 за оба найденных варианта без обоснования можно давать до 3 баллов.

За верный ответ в задаче IX.4 можно давать до 2 баллов. Если разобран пример с 17 серединами, можно давать до 3 баллов.

В задаче XI.5 за пример с 13 кораблями даётся 2 балла.

В задаче X.2 за верный пример (без обоснования) можно давать до 3 баллов.

В задачах X.3, XI.3 за верное нахождение двух пар корней можно присуждать до 3 баллов.

В задаче X.5 за попытки указать конкретную стратегию игры, но без полного и точного обоснования, баллы не присуждаются.

В задаче XI.1 баллы не присуждаются за использование приближённых вычислений с десятичными цифрами. Применение формул сокращённого умножения, с точным сравнением квадратных корней, вполне допустимо.

В задаче XI.2 годится любая логически обоснованная схема с двумя взвешиваниями.

За задачу XI.4 можно давать до 1 балла за полное рассмотрение одного или нескольких частных случаев (например, чисел, составленных из заданного набора цифр типа 1, 2, 3 с полным анализом всех остатков).

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

7 класс (решения)

1. Ответ: синий, белый, красный.

   В третьем ящике лежит не белый и не синий шарик. Значит, он красный. В первом — не белый, а также не красный. Значит, он синий. Получается, что во втором ящике лежит белый шарик.

2. Ответ: $8126 + 8126 = 16252$.

   Ясно, что Д=1 как первая цифра пятизначной суммы. Рассмотрим разряд сотен. Для него А=Д+Д=2, так как цифра А стоит на конце суммы, и она чётна. Отсюда Р+Р оканчивается на 2, поэтому Р=6, так как цифра 1 уже занята. Сложение двух последних разрядов даёт К=5. Наконец, У=8, так как при сложении У+У должно получиться 16. Решение единственно.

3. Ответ: 894326705.

   Среди двух соседних цифр непременно есть делящаяся на 3, а таких цифр всего четыре. Поэтому 10-значного числа быть не может. Попробуем построить 9-значное. Цифры 0, 3, 6, 9, кратные трём, должны стоять на чётных местах. При этом рядом с 3 и 9 стоят по обе стороны чётные цифры. Так как 9 на первом месте не стоит, максимальная первая цифра равна 8, и далее, чтобы получить максимум, ставим 9. После 9 максимальная цифра равна 4, так как 6 стоит в другом месте. Поскольку обе цифры рядом с 3 чётны, и это не 0 и не 6, цифра 3 соседствует с 2 и 4. Имеем 89432... , и дальше продолжение однозначное: 894326705.

4. Ответ: 900.

   К любому трёхзначному числу можно ровно одним способом приписать справа десятичную цифру, чтобы сумма цифр стала кратна 10. Например, к 780 дописываем 5, к 202 дописываем 6, к 334 дописываем 0, и так далее. Поскольку трёхзначные числа принимают значения от 100 до 999 включительно, их будет ровно $999 - (100 - 1) = 900$. Столько же будет и четырёхзначных чисел из условия задачи.

5. Сначала разрежем прямоугольник на три квадрата размером 3×3. Два из них оставим, а от третьего отрежем квадрат 2×2. Оставшуюся часть разрежем на 5 квадратов размером 1×1. Всего получится 8 квадратов.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

8 класс (решения)

1. В коробке с табличкой БЧ оба шарика имеют один и тот же цвет. Вынимаем из неё один шарик. Допустим, что он белый. Тогда в этой коробке два белых шарика. В коробке с табличкой ЧЧ оказываются белый и чёрный шарик, так как других вариантов нет. Наконец, в коробке с табличкой ББ оказывается два чёрных шарика.

   Случай, когда вынимаемый шар является чёрным, полностью аналогичен рассмотренному.

2. Ответ: да, можно.

   Рассмотрим такое заполнение таблицы:

0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0
1	0	1
0	1	1

   В каждй строке есть два одинаковых элемента. Легко проверить, что в любой другой строке эти элементы стоят уже на других местах. Например, если это два нуля, то они только один раз стоят в 1-м и 2-м столбце. Поэтому четвёрки одинаковых чисел на пересечении двух строк и столбцов не возникает.

3. Ответ: скорость первого автомобиля в 2 раза больше.

   Пусть скорость одного автомобиля в k раз больше скорости другого. Поскольку они выехали одновременно, один автомобиль проедет в k раз большее расстояние. После этого участки поменяются, и более медленный автомобиль, скорость которого в k раз меньше, должен будет преодолеть в k раз большее расстояние. Понятно, что у него на это уйдёт в k^2 раз больше времени. В нашем случае это число равно 4, откуда $k = 2$. То есть скорость первого автомобиля (которому осталось меньше времени ехать) вдвое больше скорости второго.

4. Ответ: нет, не может.

   Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ и проведем его диагонали. Пусть они пересекаются в точке O. Рассмотрим наиболее удаленную от неё сторону. Без ограничения общности можно считать, что это сторона AB. Поскольку расстояние от точки O до прямой AB не меньше расстояния от O до прямой AD, величина угла OAB не меньше величины угла OAD. Поэтому биссектриса угла A не может проходить внутри угла OAD и тем самым не может пересекать сторону CD во внутренней точке. Аналогично доказывается, что биссектриса угла B не пересекает сторону CD во внутренней точке. Таким образом, сторону CD не пересекает во внутренней точке никакая из биссектрис.

5. Ответ: нет, нельзя.

   В квадрате 25 клеток, а 8 прямоугольников 1×3 в сумме имеют 24 клетки. Значит, среди 8 прямоугольников ровно один должен быть вида 1×4. Покажем, что этими прямоугольниками квадрат не покрыть.

   Рассуждая от противного, временно удалим крайнюю клетку прямоугольника 1×4. Тогда квадрат без одной клетки окажется покрыт прямоугольниками 1×3. Раскрасим клетки квадрата в три цвета: в первой строке в порядке 12312, во второй 23123, в третьей 31231, и далее повторим раскраску первой и второй строк. Легко видеть, что все цвета встречаются поровну кроме цвета 2. Это значит, что если мы покрыли квадрат без одной клетки прямоугольниками 1×3, то свободная клетка имеет цвет 2 как при этой раскраске, так и при всех симметричных. Но тогда это только центральная клетка.

   Осталось заметить, что она не может быть крайней ни для какого прямоугольника 1×4.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: 13 чисел.

   Пусть первое число равно $10a+b$. Тогда второе равно $10b+a$, где $a>b>0$. Разность равна $9(a-b)$, откуда следует, что разность $a-b$ является точным квадратом. Значение разности может быть равно 1 или 4. Для первого случая имеем 8 значений для большего из чисел (21, 32, ... , 98), когда разность равна 3^2, а для второго случая имеется 5 значений (51, 62, 73, 84, 95), когда разность равна 6^2. Итого 13 чисел.

2. Ответ: нет, нельзя.

   Предположим, что есть две строки, заполненные одинаково. Среди трёх чисел строки есть два одинаковых. Выбираем столбцы, в которых стоят эти числа. Тогда на пересечении получается четыре одинаковых числа.

   Пусть теперь повторений строк не имеется. Всего имеется 8 различных вариантов заполнить строку: 000, 001, ... , 111. У нас строк 7, то есть присутствуют все варианты кроме одного. В частности, есть строка 000 или 111. Оба варианта аналогичны; рассмотрим первый из них.

   Ясно, что найдётся либо строка 001, либо 010, так как оба варианта отсутствовать не могут. Берём два столбца с нулями, и на пересечении двух строк со столбцами получается четыре нуля.

3. Ответ: двумя способами.

   Ясно, что трёхзначных слагаемых быть не может, а также должно быть хотя бы одно двузначное, так как сумма всех цифр равна 45. Пусть двузначное слагаемое одно, и мы сгруппировали цифры $a+1$ и a. Тогда двузначное слагаемое равно $10(a+1)+a=11a+10$, а сумма остальных цифр равна $45-(a+1)-a=44-2a$. Итого получается $11a+10+44-2a=99$, то есть $a=5$. Это даёт решение $9+8+7+65+4+3+2+1=99$.

   Пусть теперь двузначных слагаемых два. Будем считать, что в одном случае мы сгруппировали цифры $b+1$ и b, а в другом $a+1$ и a, где $b>a+1$. Двузначные числа равны $11b+10$ и $11a+10$ соответственно, а сумма однозначных слагаемых составляет $45-(2b+1)-(2a+1)=43-2(a+b)$. Вместе имеем $11(a+b)+20+43-2(a+b)=99$, откуда $a+b=4$. Подходит только один вариант $a=1$, $b=3$, что даёт второе решение $9+8+7+6+5+43+21=99$.

Больше решений нет, так как сумма трёх двузначных слагаемых будет не меньше $65+43+21$, что превышает 99.

4. Ответ: 17 середин.

   Рассмотрим случай, когда точки лежат на одной прямой. Введём на ней координаты, и пусть для точек получилось $a_1<\cdots<a_{10}$. Рассмотрим середины отрезков с участием a_1. Их девять, и они образуют возрастающую последовательность $\frac{a_1+a_2}{2}<\frac{a_1+a_3}{2}<\cdots<\frac{a_1+a_{10}}{2}$. Аналогично рассмотрим середины отрезков с участием a_{10}. Их также девять, и они образуют последовательность $\frac{a_1+a_{10}}{2}<\frac{a_2+a_{10}}{2}<\cdots<\frac{a_9+a_{10}}{2}$. Наибольшее число первой последовательности совпадает с наименьшим числом второй, и вместе мы имеем 17 попарно различных середин. Всего середин, тем самым, не менее 17.

   Если взять точки с чётными координатами 2, 4, 6, ... , 20, то серединами окажутся все точки с целыми координатами от 3 до 19 включительно, и их ровно 17.

   Теперь рассмотрим общий случай расположения точек на плоскости. Проведём прямые через все пары точек, и рассмотрим прямую, не перпендикулярную ни одной из этих прямых. Тогда в проекции на данную прямую все точки окажутся различными. Середина при проекции переходит в середину, а для точек на прямой мы имеем не менее 17 различных середин. Значит, всего середин было не меньше.

5. Ответ: 13.

   Один из примеров расположения 13 кораблей представлен на рисунке:

	x	x		x	x		x	x	
	x	x		x	x		x	x	
	x	x		x	x		x	x	
	x		x		x		x		
	x		x		x		x		

   Докажем, что большее число кораблей расположить невозможно. Для каждого прямоугольника 1×2 рассмотрим две пары параллельных линий, отстоящих во внешнюю сторону от его контура на расстояние $1/2$. Они задают прямоугольник 2×3 площадью 6. Также для каждой из сторон квадрата 10×10 рассмотрим линии на расстоянии $1/2$ от контура квадрата, расположенные внутри него.

Будем говорить, что нами сделаны обрамления. Из условия задачи следует, что обрамления прямоугольников и квадрата не могут накладываться друг на друга. Поэтому все обрамления кораблей содержатся во внутреннем квадрате 9×9. Если кораблей было k, то их суммарная площадь вместе с обрамлениями не больше площади внутреннего квадрата: $6k \leq 81$. Отсюда ясно, что $k \leq 13$.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Если на каком-то месте сидит рыцарь, то он сказал правду, и слева от него должен сидеть лжец. Обратно, если на каком-то месте сидит лжец, то слева от него сидит тот, кого неправильно назвали лжецом, то есть рыцарь. Это значит, что рыцари и лжецы за столом чередуются, то есть имеется по 6 тех и других.

2. Ответ: 29899856.

   Число имеет вид $100A + 56$, где A делится на 7 и при этом чётно. Сумма цифр A равна 45. Достаточно указать наименьшее число с этими свойствами. Ясно, что оно как минимум шестизначно. Наименьшее чётное число с суммой цифр 45 равно 199998, но оно на 7 не делится. Следующие по величине такие числа начинаются цифрой 2, и на конце имеют 8, так как в противном случае сумма цифр будет меньше. Тогда другие цифры — это ещё одна цифра 8 и остальные девятки. Два следующих по величине варианта — это 289998 и 298998. Легко видеть, что первое из них не делится на 7, а второе делится, поэтому к нему и приписываем в конце 56.

3. Ответ: при $x \in \{1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}\}$.

   Пусть $y = \sqrt[3]{1+x}$, $z = \sqrt[3]{3-x}$. Тогда $y^3 + z^3 = 4$. Положим $y + z = k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $k \neq 0$. Тогда $\frac{4}{k} = \frac{y^3+z^3}{y+z} = y^2 - yz + z^2 = (y+z)^2 - 3yz = k^2 - 3yz$, откуда $yz = \frac{k^3-4}{3k}$.

   Числа y, z оказываются корнями квадратного уравнения $t^2 - kt + \frac{k^3-4}{3k} = 0$. Его дискриминант равен $D = \frac{16-k^3}{3k} \geq 0$. Понятно, что k не может быть отрицательным, откуда $0 < k \leq \sqrt[3]{16}$, то есть $k = 1$ или $k = 2$.

   В первом случае y, z – корни уравнения $t^2 - t - 1 = 0$, где $x = t^3 - 1$. Ясно, что $t^2 = t + 1$, $t^3 = t^2 + t = 2t + 1$, то есть $x = 2t = 1 \pm \sqrt{5}$. Достаточно очевидно, что это даёт решения исходного уравнения.

   Во втором случае $t^2 - 2t + \frac{2}{3} = 0$, откуда $t^2 = 2t - \frac{2}{3}$, $t^3 = 2t^2 - \frac{2}{3}t = \frac{10t}{3} - \frac{4}{3}$. Корни имеют вид $t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, что даёт $x = t^3 - 1 = 1 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}$. Из общих соображений понятно, что найденные значения подходят (поскольку для них система от y, z даёт решение).

Итого решений в действительных числах получается четыре.

4. Используем известное свойство биссектрисы треугольника: она делит противолежащую сторону в отношении, равном отношению длин боковых сторон. Напомним, что этот факт можно вывести либо при помощи подобия треугольников, либо из сравнения отношений площадей двух треугольников с общей стороной, равной отрезку биссектрисы.

   Из этого свойства вытекает, что каждое из отношений AB/BK и AC/CK равно $x = AL/LK$. Поэтому $AB+AC = x\cdot(BK+CK) = x\cdot BC$, то есть $x = \frac{AB+AC}{BC} > 1$ в силу неравенства треугольника. Это значит, что $AL > LK$.

5. Ответ: выигрывает Петя.

   Рассмотрим ту же игру, но с цифрами от 2 до 9. Она длится конечное число ходов, ничьих не бывает. Значит, у одного из игроков в ней есть выигрышная стратегия.

   Рассмотрим случай, когда в новой игре побеждает тот, кто в ней начинает. Тогда он первым ходом называет некоторую цифру $a \neq 1$, и далее побеждает. Тогда Пете достаточно в исходной игре назвать это же число a. Единица делит любое число, её далее называть нельзя, то есть игра протекает точно так же, как предыдущая. Поэтому Петя побеждает.

   Теперь рассмотрим случай, когда в новой игре начинающий проигрывает. Тогда Петя в исходной игре называет число 1. Далее игра продолжается точно так же, как и игра с цифрами от 2 до 9, но в ней уже первый ход делает Вася. Поэтому он проигрывает, а Петя побеждает.

   Заметим, что стратегия правильной игры здесь сходу не известна: доказывается лишь факт её существования. Анализ игры, проведённой при помощи компьютера, показывает, что выигрывает любой из трёх начальных ходов Пети: он может назвать либо 2, либо 5, либо 7. Но сама инструкция игры достаточно сложная.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

11 класс (решения)

1. Ответ: $\sqrt[6]{18}$.

   Возведём оба числа в шестую степень. Найти $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$ можно при помощи формул сокращённого умножения, последовательно возводя в куб и в квадрат. Однако рассмотрим более простой с вычислительной точки зрения способ.

   Для начала заметим, что число $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ является корнем квадратного уравнения, из которого $x^2 = x+1$. Тогда $x^3 = x^2+x = 2x+1$, и далее последовательно выражаем остальные степени: $x^4 = 2x^2 + x = 3x + 2$, $x^5 = 3x^2 + 2x = 5x + 3$, $x^6 = 5x^2 + 3x = 8x + 5$. Теперь ясно, что $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6 = 4(1 + \sqrt{5}) + 5 = \sqrt{80} + 9 < 9 + 9 = 18$, то есть $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \sqrt[6]{18}$.

2. При первом взвешивании положим на одну чашу монеты 2 и 3 (число граммов будем везде опускать), а на другую чашу 5. Если установится равновесие, то бракованной монетой является 1. При втором взвешивании кладём 1 и 2 на одну чашу, и 3 на другую. При равновесии получается, что бракованной будет монета 5.

   Предположим, что равновесия нигде не наблюдалось. Тогда бракованной будет монета 2 или 3. По результату первого взвешивания мы тогда узнаем, легче или тяжелее она остальных. При втором взвешивании 2 и 3 лежат на разных чашах, одна из них перевесит, и мы будем знать, на какой из этих чаш находится бракованная монета, зная, в какую сторону вес такой чаши должен отклониться.

3. Ответ: при $x \in \{1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}\}$.

   Пусть $y = \sqrt[3]{1+x}$, $z = \sqrt[3]{3-x}$. Тогда $y^3 + z^3 = 4$. Положим $y + z = k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $k \neq 0$. Тогда $\frac{4}{k} = \frac{y^3+z^3}{y+z} = y^2 - yz + z^2 = (y+z)^2 - 3yz = k^2 - 3yz$, откуда $yz = \frac{k^3-4}{3k}$.

   Числа y, z оказываются корнями квадратного уравнения $t^2 - kt + \frac{k^3-4}{3k} = 0$. Его дискриминант равен $D = \frac{16-k^3}{3k} \geq 0$. Понятно, что k не может быть отрицательным, откуда $0 < k \leq \sqrt[3]{16}$, то есть $k = 1$ или $k = 2$.

В первом случае y, z – корни уравнения $t^2-t-1=0$, где $x=t^3-1$. Ясно, что $t^2=t+1$, $t^3=t^2+t=2t+1$, то есть $x=2t=1\pm\sqrt{5}$. Достаточно очевидно, что это даёт решения исходного уравнения.

Во втором случае $t^2-2t+\frac{2}{3}=0$, откуда $t^2=2t-\frac{2}{3}$, $t^3=2t^2-\frac{2}{3}t=\frac{10t}{3}-\frac{4}{3}$. Корни имеют вид $t=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, что даёт $x=t^3-1=1\pm\frac{10}{9}\sqrt{3}$. Из общих соображений понятно, что найденные значения подходят (поскольку для них система от y, z даёт решение).

Итого решений в действительных числах получается четыре.

4. Ответ: нет, нельзя.

   Покажем, что хотя бы один из остатков таким образом не получается.

   Прежде всего, если все три цифры имеют одну и ту же чётность, то и остатки, получаемые из чисел, имеют ту же самую чётность. Поэтому для трёх цифр будем рассматривать два случая: ЧЧН и ННЧ (две цифры чётны, одна нечётна, либо наоборот).

   Пусть состав цифр имеет вид ЧЧН. Чтобы получить нечётный остаток, нужно последней цифрой взять нечётную. Далее рассмотрим остатки от деления на 4 двузначного числа, образованного двумя последними цифрами. Последнюю цифру фиксируем, а предпоследнюю меняем, получая три значения. Остаток же принимает всего два значения: 1 или 3. Значит, какое-то из этих двух значений встретится только один раз. В принципе, можно сразу отметить, что в этом случае предпоследняя цифра совпадает с последней, то есть она нечётна (напомним, что повторять цифры разрешено).

   Итак, мы выяснили, что имеется остаток r от деления на 4, который получается только одним способом за счёт двузначного числа на конце. Из него надо получить четыре остатка от деления на 16, а именно, значения r, $r+4$, $r+8$, $r+12$. Однако первая цифра принимает только три значения, и один из остатков точно не реализуется.

   Пример: цифры 2, 3, 4. (Будем стандартно говорить "по модулю m", если речь об остатках от деления на m.) Чтобы по модулю 4 получилось 1, на конце должно стоять 33. По модулю 16, это 1. Первую цифру мы умножаем на 100, что заменяется на 4, и далее берётся остаток от деления на 16. В нашем примере это 8, 12, 0. Значение 4 не возникает. Значит, $4+33=5$ по модулю 16 получиться не может.

   Случай ННЧ полностью аналогичен. Если две последние цифры взять одинаковыми, то соответствующее значение r по модулю 4 возникает только этим способом. Варьируя первую цифру, получаем только три возможности, а не четыре — для остатков r, $r+4$, $r+8$, $r+12$.

   Пример: цифры 1, 2, 3 (то, что они взяты подряд, ситуацию никак не упрощает). На конце ставим 22, за счёт первой цифры прибавляется 4, 8 или 12, но не прибавляется 0. Поэтому значение $22 = 6$ по модулю 16 не возникает в качестве остатка.

5. Ответ: $\frac{8}{3}$.

   Положим $a = AB = BC$, $AC = 2b$. Тогда высота, опущенная на основание, равна $h = \sqrt{a^2 - b^2}$. Площадь равна $S = bh$, а полупериметр равен $p = a + b$. Отсюда $r = \frac{S}{p} = \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$.

   По теореме синусов, $a = 2R\sin\hat{A} = \frac{2Rh}{a}$, откуда $R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$. Наконец, окружность, вписанная в сегмент, касается отрезка AB в его середине. Высота сегмента равна $2r$, поэтому расстояние от центра O описанной окружности до середины D отрезка AB равно $R - 2r$. Из подобия прямоугольных треугольников OBD и CBK, где K — середина AC, имеем $\frac{R-2r}{R} = \frac{b}{a}$. Тем самым, $\frac{2r}{R} = \frac{a-b}{a}$.

   Используя выражения для r и R через величины a, b, имеем уравнение

$$\frac{2r}{R} = \frac{4b(a^2-b^2)}{a^2(a+b)} = \frac{4b(a-b)}{a^2} = \frac{a-b}{a}.$$

   Упрощая, получаем $a = 4b$. Отсюда $r = \frac{b\sqrt{15}}{5}$ и $R = \frac{8b}{\sqrt{15}}$, то есть $R : r = \frac{8}{3}$.